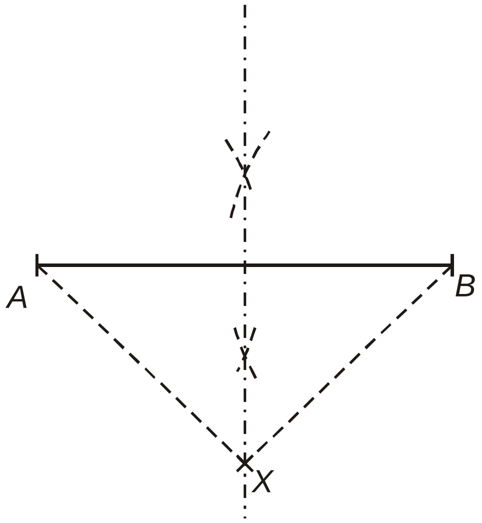
3.3.5 Množiny bodů dané vlastnosti II (osa úsečky)

Předpoklady: 030304

Př. 1: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 5{,}5\,\text{cm}$. Narýsuj osu úsečky *AB*. Jakou vlastnost mají body ležící na této přímce?



Pro všechny body *X* na ose úsečky *AB*, platí $|AX| = |BX|$ (bod je stejně vzdálen od krajních bodů úsečky *A*, *B*.

Pedagogická poznámka: S nalezením speciální vlastnosti mají žáci překvapivě potíže.

Osa úsečky *AB* představuje množinu všech bodů *X* roviny, jejichž vzdálenost od krajních bodů úsečky *A*, *B* je stejná ($|AX| = |BX|$).

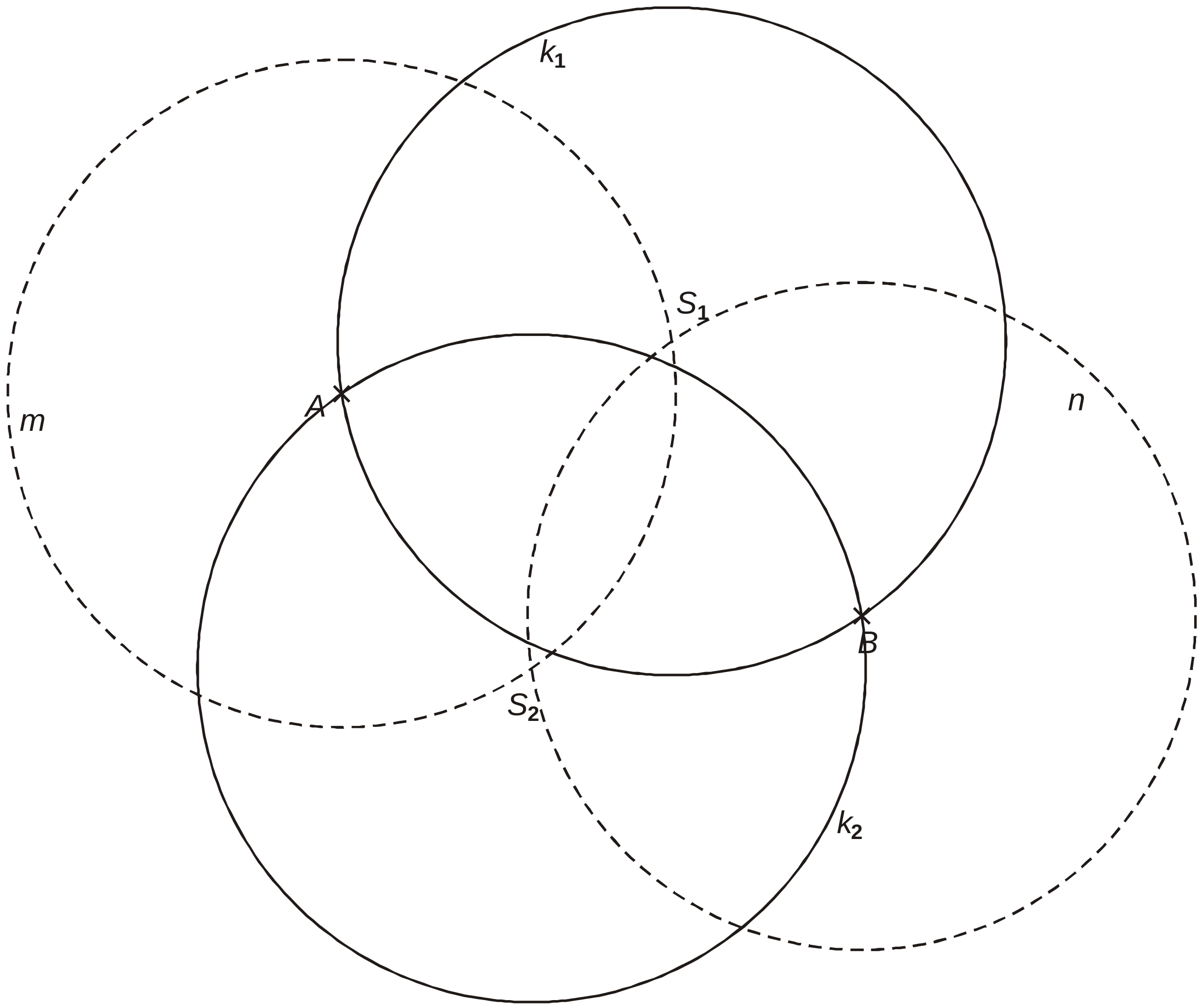
Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu se opět často objevuje obrácené řešení – nejdříve si žák narýsuje kružnici a pak na ní udělá průměr *AB*. Opakujeme si proto, že věta : „Jsou dány body *A*, *B*“ znamená, že někdo jiný zadá libovolně body *A*, *B* a úkolem je najít obecný postup nelezení kružnice bez toho, abychom spoléhali, že body mají vzdálenost 9 cm (což je přesně to, co potřebujeme, abychom mohli narýsovat přímku *AB* jako průměr kružnice nebo narýsovat kružnici okolo průměru *AB*).

Př. 2: Jsou dány body *A*, *B*. Najdi všechny kružnice, které prochází body *A*, *B* a mají poloměr 4,5 cm. Napiš zápis konstrukce. Má úloha vždy řešení?

Poloměr hledané kružnice známe $\Rightarrow$ potřebujeme najít její střed. Střed hledané kružnice:

- je od bodu *A* vzdálen 4,5 cm (aby kružnice procházela bodem *A*) $\Rightarrow$ musí ležet na kružnici $m(A;\,4{,}5\text{ cm})$,
- je od bodu *B* vzdálen 4,5 cm (aby kružnice procházela bodem *B*) $\Rightarrow$ musí ležet na kružnici $n(B;\,4{,}5\text{ cm})$,

$\Rightarrow$ najdeme ho jako průsečík kružnic $m(A;\,4{,}5\text{ cm})$ a $n(B;\,4{,}5\text{ cm})$.

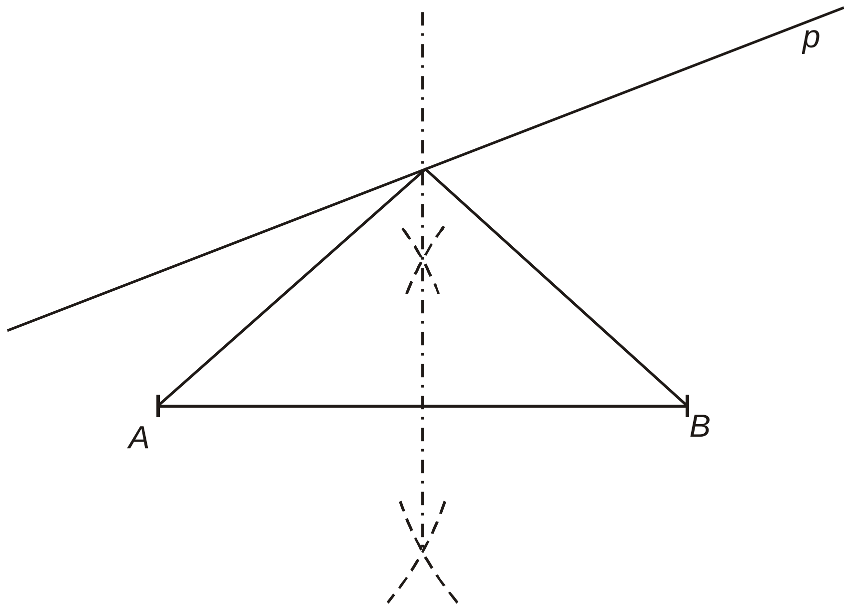


Úloha má řešení, pokud se kružnice *m* a *n* navzájem protnou $\Rightarrow$ pokud vzdálenost bodů *A*, *B* nebude větší než 9 cm.

Pedagogická poznámka: Většina žáků zopakuje řešení z minulé hodiny (pomocí dvou kružnic), při kontrole si pak řekneme, že je místo jedné z kružnic bychom mohli použít i osu úsečky, ale v tomto případě, jde určitě o časové náročnější postup, ze kterého navíc není tak hezky zřejmé, kdy příklad nemá řešení.

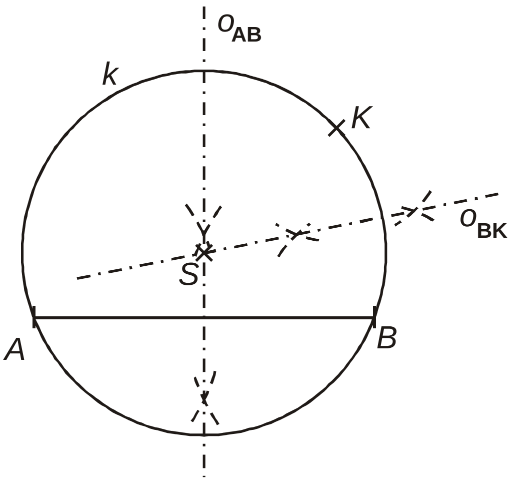
Př. 3: Je dána úsečka *AB* a přímka *p*, různoběžná s přímkou *AB*. Narýsuj všechny rovnoramenné trojúhelníky *ABC* se základnou *AB*, jejichž vrchol *C* leží na přímce *p*.

Bod *C* leží na přímce *p*, ale nevíme, kde $\Rightarrow$ musíme zužitkovat další informaci v zadání o rovnoramennosti trojúhelníku *ABC*.
Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný se základnou *AB* $\Rightarrow$ bod *C* je stejně vzdálený od bodů *A*, *B* $\Rightarrow$ bod *C* musí ležet na ose úsečky *AB* (množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů *A* a *B*).
Bod *C* najdeme jako průsečík přímky *p* a osy úsečky *AB*.



Př. 4: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 4{,}5\text{ cm}$ a bod *K*, který neleží na přímce *AB* . Najdi všechny kružnice, které prochází krajními body úsečky *AB* a bodem *K*. Napiš zápis konstrukce.

Kružnice prochází body *A*, *B* $\Rightarrow$ střed kružnice musí být od bodů *A*, *B* stejně vzdálen $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na ose úsečky *AB*.
Kružnice prochází bodem *K* $\Rightarrow$ musí procházet najednou body *B*, *K* (nebo *A* a *K*) $\Rightarrow$ střed kružnice musí být od bodů *B*, *K* stejně vzdálen $\Rightarrow$ střed kružnice musí ležet na ose úsečky *BK*.



1. úsečka *AB*, $|AB| = 4{,}5\text{ cm}$, bod *K*, *K* neleží na přímce *AB*

2. přímka o_{AB} , osa úsečky *AB*

3. přímka o_{BK} , osa úsečky *BK*

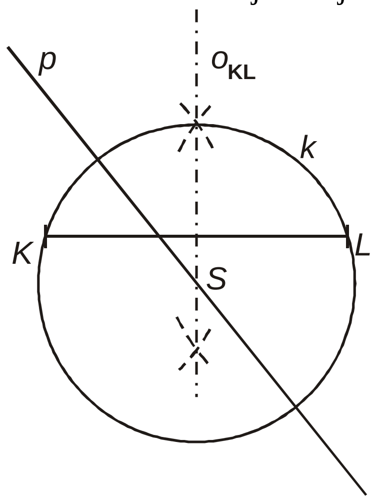
4. bod *S*, průsečík přímek o_{AB} a o_{BK}

5. kružnice $k\left(S; |SA|\right)$

Pedagogická poznámka: Při kontrole je třeba, aby si žáci uvědomili, že pojmenování bodů je mělo mást (většina z nich přistupuje k bodům *A*, *B* jinak než k bodu *K*) a že příklad ve skutečnosti není nic jiného než hledání kružnice opsané trojúhelníku *ABK*.

Př. 5: Je dána úsečka *KL*, $|KL| = 4\,\text{cm}$ a přímka *p*, která je různoběžná s přímkou *KL*. Narýsuj všechny kružnice se středem na přímce *p*, které procházejí body *K*, *L*.

Střed *S* hledané kružnice leží na přímce *p*, ale nevíme, kde $\Rightarrow$ musíme zužitkovat další informaci v zadání o průchodu body *K*, *L*.
Kružnice prochází body *K*, *L* $\Rightarrow$ střed *S* je stejně vzdálený od bodů *K*, *L* $\Rightarrow$ střed *S* musí ležet na ose úsečky *KL* (množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů *K* a *L*).
Střed kružnice *S* najdeme jako průsečík přímky *p* a osy úsečky *AB*.



Pedagogická poznámka: Je dobré pokud si někdo všimne, že předchozí příklad je v podstatě shodný s příkladem 3.

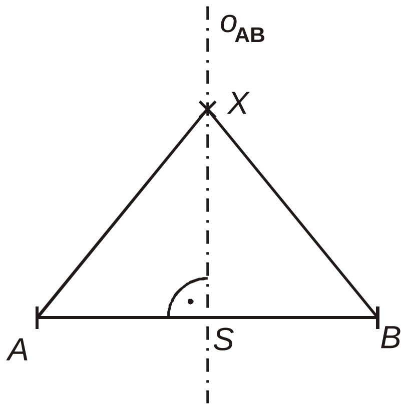
Př. 6: Dokaž, že osa úsečky *AB* je množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenosti od bodů *A* a *B*.

Osa úsečky *AB* je množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenosti od bodů *A* a *B* $\Rightarrow$ platí dvě věci:

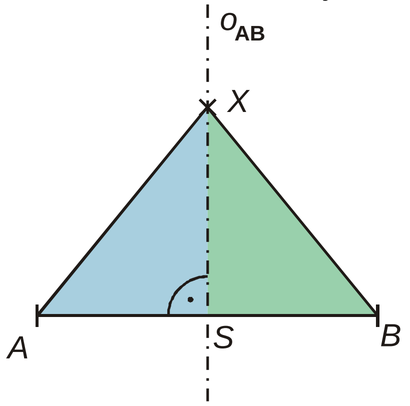
- pokud bod leží na ose úsečky *AB*, je od bodů *A*, *B* stejně vzdálený,
- pokud má bod stejnou vzdálenost od bodů *A*, *B*, leží na ose úsečky *AB*.

Obě věci musíme dokázat.

Dokazujeme: Pokud bod leží na ose úsečky *AB*, je od bodů *A*, *B* stejně vzdálený
Vycházíme z toho, že bod leží na ose úsečky *AB* (to pro nás bude fakt) a z tohoto předpokladu se snažíme přesvědčit, že takový bod má stejnou vzdálenost od bodů *A*, *B*.



Na obrázku si můžeme vyznačit dva trojúhelníky *ASX* a *BSX*.



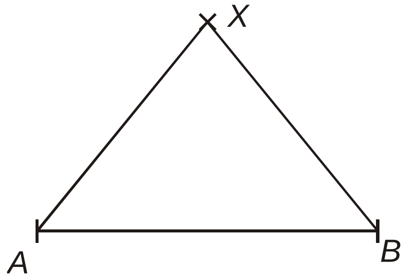
Zdá se, že tyto trojúhelníky jsou shodné. Zkusíme najít jednu z vět o shodnosti trojúhelníků.
Trojúhelníky se shodují:

- společná strana $|SX|$,
- úhel při vrcholu *S* (je pravý),
- platí $|AS| = |BS|$ (bod *S* je střed úsečky *AB*)

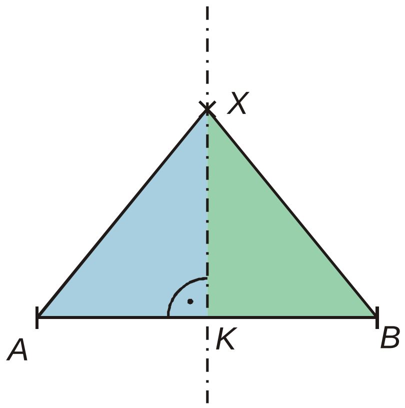
$\Rightarrow$ trojúhelníky *ASX* a *BSX* jsou shodné podle věty *sus* $\Rightarrow$ shodují se všech stranách $\Rightarrow$ platí $|AX| = |BX|$ (bod *X* je stejně daleko od bodů *A*, *B*).

Úvaha platí pro libovolnou polohu bodu *X* na přímce o_{AB} kromě bodu *S* (kde je stejná vzdálenost od bodů *A*, *B* zřejmá z faktu, že bod *S* je střed úsečky *AB*) $\Rightarrow$ dokázali jsme, že pokud bod leží na ose úsečky *AB*, je od bodů *A*, *B* stejně vzdálený.

Dokazujeme: Pokud má bod stejnou vzdálenost od bodů *A*, *B*, leží na ose úsečky *AB*.
Vycházíme z toho, že bod *X* je stejně vzdálený od bodů *A* , *B* (to pro nás bude fakt) a z tohoto předpokladu se snažíme přesvědčit, že takový bod leží na ose úsečky *AB*.



Do obrázku si můžeme dokreslit přímku, která je kolmá na úsečku *AB* a prochází bodem *X*.
Na obrázku tak vzniknou dva trojúhelníky *AKX* a *BKX*.



O bodu K nevíme, zda leží uprostřed strany. Pokud se nám podaří dokázat, že leží, bude důkaz hotový, protože nakreslená přímka bude kolmá a bude procházet středem úsečky a tedy bude osou.
Potřebujeme dokázat, že platí $|AK| = |BK|$. Oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, známe dvě strany (shodné strany AX a BX a shodnou společnou stranu KX) $\Rightarrow$ můžeme dopočítat zbývající strany AK a BK pomocí Pythagorovy věty. Protože budeme do stejného vzorce při výpočtu zbývající strany dosazovat stejné hodnoty (zbývající strany jsou shodné), musíme získat stejné výsledky $\Rightarrow$ $|AK| = |BK|$ $\Rightarrow$ bod K je středem úsečky AB $\Rightarrow$ zakreslená kolmá přímka, na které leží bod X je osou úsečky AB (platí tedy, že pokud je bod X stejně daleko od bodů A, B, leží na ose úsečky AB).

Pedagogická poznámka: Na konci hodiny si ukazujeme první část důkazu „je-li na ose, je stejně vzdálený“, druhou část necháváme ještě na rozmyšlenou pro začátek příští hodiny (s tím, že si řekneme, že buď můžeme dokazovat, „je-li stejně vzdálený, je na ose“, nebo „není-li na ose, není stejně vzdálený“). Důkaz druhé části by bylo možné provést i rychleji pomocí věty *Ssu*, kterou však v tomto okamžiku žáci neznají (na druhou stranu, pokud ji použijete, nikdo se nad tím nepozastaví).

Shrnutí: Množinou všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od bodů A, B, je osa úsečky AB.